ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2003 Естественные науки

Механика

УДК 532.516

Г.А. БАБАДЖАНЯН

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ РЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ С ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

Рассматривается нестационарное течение реальной несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе с проницаемыми стенками. Задача сводится к решению линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которые решаются методами операционного исчисления. Применяется двойное интегральное преобразование Лапласа.

Исследуем неустановившееся движение вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе с пористыми стенками. Эти исследования, помимо теоретического значения, имеют и многочисленные практические применения для магистральных, промысловых и городских распределительных водопроводных систем, газопроводов и паропроводов, которые часто работают при нестационарных режимах и имеют в ряде мест по длине трубопровода отбор или подкачку жидкости. Часто при исследовании таких задач дискретное распределение точек отбора (подкачки) заменяется непрерывным [1]. Поэтому исследование таких задач можно свести к изучению нестационарного движения жидкости в трубах с проницаемыми стенками.

1. Пусть в круглую неограниченную в одном направлении трубу с проницаемыми стенками поступает жидкость с равномерным по сечению распределением скорости U и давлением P_H. Действие массовых сил не учитывается. В качестве исходных используем приближенные уравнения движения жидкости, записанные в цилиндрических координатах [2]:

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}\right),\quad \frac{\partial P}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV_r\right)=0. \qquad (1.1)$$

В системе (1.1) слагаемые, зависимые от ускорений и вязкости, учтены частично. В (1.1) V_z и V_r – осевая и радиальная компоненты скорости, P – давление, ρ – плотность, ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости. Краевые условия для поставленной задачи имеют следующий вид:

$$
\begin{array}{lllll}
t=0, & & V_z=0, & V_r=0, & P=0, \\
t>0, & z=0, & V_z=U, & V_r=0, & P=P_H, \\
t>0, & z>0, & r=a, & V_z=0, & V=\pm V_0, \\
t>0, & z>0, & r=0, & V_r=0. &
\end{array}
\tag{1.2}
$$

Здесь a – радиус трубы, V_0 – скорость отсоса (вдува), знак "+" перед V_0 соответствует отсосу, а "–" – вдуву жидкости через пористую поверхность трубы. С помощью безразмерных переменных $x=z/a$, $y=r/a$, $T=Ut/a$, $u=(V_z-U)/U$, $V=V_r/U$ и $\Phi=(P-P_H)/\rho U^2$ система уравнений (1.1) и краевые условия (1.2) примут вид

$$
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}(yV)=0,\tag{1.3}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
T=0, & & u=-1, & V=0, & \Phi=-P_H/\rho U^2, \\
T>0, & x=0, & u=0, & V=0, & \Phi=0, \\
T>0, & x>0, & y=1, & u=-1, & V=\pm V_0/U, \\
T>0, & x>0, & y=0, & V=0, &
\end{array}
\tag{1.4}
$$

где $\mathrm{Re}=U_a/\nu$ – число Рейнольдса.

2. Для нахождения решения задачи воспользуемся двойным интегральным преобразованием Лапласа [3]. Применяя двойное интегральное преобразование Лапласа по переменным T и x к уравнениям (1.3) и к краевым условиям (1.4), получим

$$
\frac{d^2\bar{\bar{u}}}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{d\bar{\bar{u}}}{dy}-\mathrm{Re}\,S_1\bar{\bar{u}}=\mathrm{Re}\,S_2\bar{\bar{\Phi}}+\frac{\mathrm{Re}}{S_2},\qquad S_2\bar{\bar{u}}+\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\left(y\bar{\bar{V}}\right)=0,\qquad \frac{d\bar{\bar{\Phi}}}{dy}=0,\tag{2.1}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
T=0, & \bar{u}=-\dfrac{1}{S_1}, & \bar{V}=0, & \bar{\Phi}=-\dfrac{P_H}{\rho U^2}\dfrac{1}{S_1}, & \\
T>0, & x=0, & \bar{u}=0, & \bar{V}=0, & \bar{\Phi}=0, \\
T>0, & x>0, & y=1, & \bar{u}=-\dfrac{1}{S_1}, & \bar{V}=\pm\dfrac{V_0}{U}\dfrac{1}{S_1}, \\
T>0, & x>0, & y=0, & \bar{V}=0, & \\
T>0, & x>0, & y=1, & \bar{\bar{u}}=-\dfrac{1}{S_1S_2}, & \bar{\bar{V}}=\pm\dfrac{V_0}{U}\dfrac{1}{S_1S_2}, \\
T>0, & x>0, & y=0, & \bar{\bar{V}}=0, &
\end{array}
\tag{2.2}
$$

где

$$
\bar{\bar{u}}(S_1,S_2,y)=\int_0^\infty\int_0^\infty \exp[-S_1T+S_2x]\cdot u(x,y,T)\,dT\,dx,
$$

$$
\bar{\bar{V}}(S_1,S_2,y)=\int_0^\infty\int_0^\infty \exp[-S_1T+S_2x]\cdot V(x,y,T)\,dT\,dx,\tag{2.3}
$$

$$\bar{\bar{\Phi}}(S_1,S_2,y)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\exp[-S_1T+S_2x]\cdot\Phi(x,T)dTdx,$$

а S_1 и S_2 – параметры двумерного преобразования Лапласа по переменным T и x соответственно.

Общим решением первого уравнения системы (2.1) будет

$$\bar{\bar{u}}=C_1I_0(\beta y)+C_2K_0(\beta y)-\frac{1}{S_1S_2}-\bar{\bar{\Phi}}\frac{S_2}{S_1}, \tag{2.4}$$

где $\beta^2=\mathrm{Re}\,S_1$, а $I_0(\beta y)$ и $K_0(\beta y)$ – функции Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента [4]. Так как функция $K_0(\beta y)$ при $y=0$ обращается в бесконечность, а скорость жидкости на оси трубы должна быть конечной, то постоянную C_2 необходимо приравнять к нулю. Определяя постоянную интегрирования C_1 из краевых условий (2.2), получим следующее решение уравнения (2.4):

$$\bar{\bar{u}}=\frac{I_0(\beta y)}{I_0(\beta)}\frac{\bar{\bar{\Phi}}S_2}{S_1}-\frac{1}{S_1S_2}-\frac{\bar{\bar{\Phi}}S_2}{S_1}. \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) во второе уравнение системы (2.1), интегрируя по переменной y в пределах от 0 до 1 и учитывая краевые условия (2.2), для функции $\bar{\bar{\Phi}}(S_1S_2)$ получим

$$\bar{\bar{\Phi}}=\pm\frac{2V_0}{U}\frac{1}{S_2^3}\frac{I_0(\beta)}{I_2(\beta)}-\frac{I_0(\beta)}{S_2^2I_2(\beta)}. \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.5), для функции $\bar{\bar{u}}(S_1,S_2,y)$ получим следующее выражение:

$$\bar{\bar{u}}=\left(\pm\frac{2V_0}{U}\frac{1}{S_2^2}-\frac{1}{S_2}\right)\frac{I_0(\beta y)}{S_1I_2(\beta)}+\left(\frac{1}{S_2}\mp\frac{2V_0}{U}\frac{1}{S_2^2}\right)\frac{I_0(\beta)}{S_1I_2(\beta)}-\frac{1}{S_1S_2}. \tag{2.7}$$

Применяя двумерное обратное преобразование Лапласа к уравнениям (2.6) и (2.7) и переходя к первоначальным переменным, для величин P и V_z получим

$$P=P_H-\rho U^2\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\frac{Ut}{a}-4\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\exp(-\frac{\beta_k^2Ut}{\mathrm{Re}\,a})}{\beta_K^2}\right)\cdot\frac{z}{a}\left(1\mp\frac{V_0}{aU}z\right), \tag{2.8}$$

$$V_z=U+\frac{2Uz}{a}\left(1\pm\frac{V_0}{a}\frac{z}{a}\right)\left[\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)+2\sum_{K=1}^{\infty}\left(1-\frac{I_0\left(\beta_K\frac{r}{a}\right)}{I_0(\beta_K)}\right)\cdot\frac{\exp(-\beta_K^2\frac{Ut}{\mathrm{Re}\,a})}{\beta_K^2}\right], \tag{2.9}$$

где величины $\beta_K = -i\sqrt{\mathrm{Re}\, S_K}$ являются действительными корнями функции Бесселя первого порядка. Из третьего уравнения системы (1.1) определим значение $V_r(z,t,r)$:

$$V_r = \frac{2U}{a}\left(1 \pm \frac{2V_0 z}{a^2}\right) \cdot \left[\left(\frac{r^3}{4a^2} - \frac{r}{2}\right) + 2\sum_{K=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2} - \frac{a I_1\left(\beta_K \frac{r}{a}\right)}{r\beta_K^3 I_0(\beta_K)}\exp(-\beta_K^2 \frac{Ut}{\mathrm{Re}\, a}\right)\right]. \quad (2.10)$$

Сила трения между слоями жидкости и на поверхности трубы определится по следующим формулам:

$$\tau = \mu\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z}\right) = -\frac{4\mu U}{a} z\left(1 \pm \frac{V_0}{a}\frac{z}{a}\right) \cdot \left[\frac{r}{a^2} + \sum_{K=1}^{\infty}\frac{I_0\left(\beta_K \frac{r}{a}\right)}{\beta_K a I_0(\beta_K)}\exp\left(-\beta_K^2 \frac{Ut}{\mathrm{Re}\, a}\right)\right] \mp$$

$$\mp \frac{4\mu U}{a}\frac{V_0}{a^2}\left\{\left(\frac{r^3}{4a^2} - \frac{r}{a}\right) + 2\sum_{K=1}^{\infty}\left[\frac{r}{2} - \frac{a I_1\left(\beta_0 \frac{r}{a}\right)}{r\beta_K^2 I_0(\beta_K)}\exp\left(-\beta_K^2 \frac{Ut}{\mathrm{Re}\, a}\right)\right]\right\}, \quad (2.11)$$

$$\tau_{r=a} = -\frac{4\mu U_z}{a^2} \cdot \left(1 \pm \frac{V_0}{U}\frac{z}{a}\right) \cdot \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_0'(\beta_k)}{\beta_k I_0(\beta_k)} \cdot \exp\left(-\beta_k^2 \frac{Ut}{\mathrm{Re}\, a}\right)\right] \mp$$
$$\mp \frac{4\mu V_0}{a}\left\{\frac{1}{4} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2} - \frac{I_1(\beta_k)}{\beta_k^3 I_0(\beta_k)}\right] \cdot \exp\left(-\beta_k^2 \frac{Ut}{\mathrm{Re}\, a}\right)\right\}. \quad (2.12)$$

Здесь μ – динамический коэффициент вязкости жидкости .

Кафедра теоретической механики *Поступила 17.02.2003*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабровский С.А., Щербакова С.Г., Гусейн-Заде М.А.** Движение газа в газопроводах с путевым отбором. М.: Наука, 1972, 48 с.
2. **Тарг С.А.** Основные задачи теории ламинарных течений. М.: Госиздат, 1951.
3. **Диткин В.А., Прудников А.П.** Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. М.: Физматгиз, 1958.
4. **Ватсон Г.Н.** Теория Бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949, ч. 1.

Գ.Հ. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ

ԻՐԱԿԱՆ ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿԻ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԹԱՓԱՆՑԻԿ ՊԱՏԵՐՈՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԽՈՂՈՎԱԿՈՒՄ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է իրական անսեղմելի հեղուկի ոչ ստացիոնար շարժումը թափանցիկ կողմնային մակերևույթով գլանային խողովակում: Խնդրի ոչ ստացիոնարությունը պայմանավորված է հեղուկի շարժման ոչ ստացիոնարությամբ, որը արտահայտվում է շարժման դիֆերենցիալ հավասարումներում: Խնդիրը լուծվում է օպերացիոն հաշվման եղանակով. կիրառվում է Լապլասի կրկնակի ինտեգրալ ձևափոխությունը տարածական կոորդինատի և ժամանակի նկատմամբ: Որոշվում են շարժման բնութագրիչ մեծությունները որպես տարածական կոորդինատների և ժամանակի ֆունկցիաներ:

G.H. BABAJANYAN

NON-STEADY-STATE FLOW OF REAL INCOMPRESSIBLE FLUID IN PIPE WITH POROUS WALLS

Summary

Non-steady-state flow of real incompressible liquid in a cylindric pipe with porous lateral surfaces is investigated. Nonstationarity of the problem is conditioned by non-steady-state movement of the fluid which is expressed in differential equations of motion. The problem is solved by the operational calculus method by use of Laplace double integral transformations on spatial and time coordinates. Characteristics of the flow motion are determined as functions of spatial and time coordinates