ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2004 Естественные науки

Математика

УДК 519.214

Т. П. КАЗАНЧЯН

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ЭРДЕША–КАЦА ДЛЯ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Получена степенная оценка скорости сходимости в предельной теореме Эрдеша–Каца для стационарных случайных последовательностей, удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания.

1. Введение. Предельные теоремы для последовательностей независимых случайных величин представляют собой один из важнейших разделов теории вероятностей. Классическими примерами здесь являются законы больших чисел, различные формы закона повторного логарифма, центральная и локальная предельные теоремы. В то же время многочисленные практические применения теории вероятностей, а также логика ее внутреннего развития ясно указывают на то, что в предельных теоремах условие независимости компонент случайной последовательности является излишне ограничительным. По этим причинам задача распространения предельных законов теории вероятностей на зависимые случайные последовательности уже достаточно давно является одной из самых актуальных. Тема настоящей работы лежит в русле указанной проблематики и касается задачи оценки скорости сходимости в предельной теореме Эрдеша–Каца для слабо зависимых случайных последовательностей.

2. Необходимые сведения и предварительные определения. В работе [1] Эрдеш и Кац предложили новый метод доказательства предельных теорем для независимых случайных величин, названный ими «принципом инвариантности», и, в частности, доказали следующую теорему.

Теорема. Пусть ξ_n, $n=1,2,\dots$, последовательность независимых случайных величин, для которых имеет место центральная предельная теорема (ц.п.т.). Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{1\le k\le n}|S_k|<\sigma_n x\right)=P\left(\sup_{0\le s\le 1} B(s)<x\right)=T(x),\quad x>0,$$

где $S_k=\sum_{i=1}^{k}\xi_i,\sigma_n^2=\sum_{i=1}^{n}D\xi_i,B(s)$, $s\ge 0$, – стандартное броуновское движение и $T(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\exp\left(-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8x^2}\right), x\in R^1$.

Данная теорема и метод ее доказательства послужили отправной точкой для многих обобщений и новых направлений исследования. В дальнейшем идеи Эрдеша и Каца были развиты Донскером [2] и свой завершенный вид получили в известной работе Прохорова [3] (см. также [4]). В контексте настоящей статьи отметим полученные Чжуном [5] и Пакширайаном [6] слабые оценки скорости сходимости в теореме Эрдеша–Каца, достаточные для установления закона повторного логарифма, а также универсальные оценки скорости сходимости в принципе инвариантности для схемы серий независимых случайных величин, полученные Боровковым [7] (в метрике Леви–Прохорова) и Саханенко [8] (в равномерной метрике). Для слабо зависимых случайных величин наиболее продвинутые результаты о скорости сходимости в ц.п.т. были получены Тихомировым [9]. Слабые оценки скорости сходимости в теореме Эрдеша–Каца, достаточные для выполнения закона повторного логарифма в форме Чжуна, были получены автором [10, 11], а также Каганавой [12].

В настоящей работе мы интересуемся стационарными случайными последовательностями. В рамках исследований по предельным теоремам для таких последовательностей определяются различные условия слабой зависимости (условия перемешивания). Классическая теория предельных теорем для таких последовательностей изложена в монографии [13]. Мы будем рассматривать стационарные последовательности, удовлетворяющие условию равномерно сильного перемешивания (φ-перемешивания). Говорят, что стационарная последовательность ξ_t, $t\in Z^1$ (Z^1 – совокупность целых чисел), удовлетворяет условию φ-перемешивания, если

$$|P(AB)-P(A)P(B)|\le\varphi(n)P(B)$$

при всех $B\in m_{-\infty}^{0}, A\in m_n^{+\infty}$ и $\varphi(n)\to 0$ при $n\to\infty$. Здесь $m_{-\infty}^{0}$ – σ-алгебра, порожденная случайными величинами ξ_t, $t\le 0$, $m_n^{+\infty}$ – σ-алгебра, порожденная случайными величинами ξ_t, $t\ge n$.

При оценке близости случайных величин мы будем пользоваться равномерной метрикой и метрикой Леви–Прохорова. Равномерная метрика для случайных величин X и Y с функциями распределения F_X и F_Y определяется следующим образом:

$$\rho(X,Y)=\rho(F_X,F_Y)=\sup\{|F_X(z)-F_Y(z)|, z\in R^1\}.$$

Метрика Леви–Прохорова определяется так:

$$\pi(X,Y)=\pi(F_X,F_Y)=\inf\{\varepsilon: F_X(z)\le F_Y(z+\varepsilon)+\varepsilon, F_Y(z)\le F_X(z+\varepsilon)+\varepsilon, z\in R^1\}.$$

Известно (см. [14]), что между этими метриками имеет место соотношение

$$\pi(X,Y)\le\rho(X,Y). \quad (1)$$

3. Основные результаты. Пусть $S_k = \sum_{t=1}^{k} \xi_t$, $\sigma_k^2 = DS_k$ – дисперсия суммы S_k, $k = 1,2,\dots,n,\dots$, $F_n(x) = P\left(\max_{1\le k\le n} |S_k| < x\sigma_n\right)$. Следующие две теоремы представляют основные результаты настоящей работы.

Теорема 1. Пусть ξ_t, $t \in Z^1$, – стационарная, центрированная ($M\xi_0 = 0$) случайная последовательность, удовлетворяющая условию φ-перемешивания, и, кроме того, выполнены следующие условия:

1) $M|\xi_0|^s < \infty$, $2 < s < 3$;

2) для любого подмножества целых чисел $I \subset [0,n]$ $\sigma_0^2 |I| < DS_I < \sigma_1^2 |I|$, $\sigma_o^2 > 0$;

3) $\varphi(n) \sim \dfrac{C_0}{n^\delta}$, $\delta > 0$, $C_0 > 0$.

Тогда $\Delta_n = \pi(F_n, T) \le C_1 n^{-\left(\frac{\delta(s-2)}{3s+4\delta s-2\delta}\right)}$, $C_1 > 0$.

Следствие. Если в условиях *теоремы 1* $\delta > 2$, то $\sigma_0^2 = \sum_{t=1}^{\infty} M\xi_0\xi_t < \infty$ и условие 2) можно заменить условием $\sigma_0^2 > 0$, при выполнении которого $DS_n \sim \sigma_0^2 n, n \to \infty$. При экспоненцильном убывании коэффициента перемешивания φ оценку на Δ_n можно усилить.

Теорема 2. Пусть ξ_t, $t \in Z^1$, – стационарная, центрированная ($M\xi_0 = 0$) последовательность случайных величин, удовлетворяющая условию φ-перемешивания. Если

1) $M|\xi_0|^s < \infty$, $2 < s < 3$,

2) $\varphi(n) \le A e^{-\gamma \cdot n}$, $\gamma > 0$, $A > 0$,

тогда ряд $\sigma_0^2 = \sum_{t=1}^{\infty} M\xi_0\xi_t$ сходится, и если $\sigma_0^2 > 0$, то $\Delta_n \le C_\gamma n^{-\left(\frac{s-2}{2s-1}\right)} \ln^{1/2} n$.

Доказательство основных результатов. Проведем секционирование отрезка $[0,n]$ на малые интервалы посредством следующих целочисленных функций:

$p = p(n) = [n^\alpha]$, $q = q(n) = [n^\beta]$, $n \in N$, $0 < \beta < \alpha < 1$, $[.]$ – целая часть числа. Пусть $k = k(n) = \left[\dfrac{n}{p+q}\right]$.

Положим $S_n' = \sum_{j=1}^{k} X_j^{(n)}$, $X_j^{(n)} = \sum_{i=(j-1)p+(j-1)q}^{jp+(j-1)q} \xi_i$, $j = 1,2,\dots,k$,

$$S_n'' = \sum_{j=1}^{k+1} Y_j^{(n)}, \quad Y_j^{(n)} = \sum_{i=jp+(j-1)q}^{jp+jq} \xi_i, \quad j=1,2,\dots,k,$$

$$Y_{k+1}^{(n)} = \sum_{i=kp+kq+1}^{n} \xi_i.$$

Понятно, что $S_n = S_n' + S_n''$. Рассмотрим теперь схему серий Z_{nj}, $j=1,2,\dots,k(n)$, $n=1,2,\dots$, независимых в каждой серии случайных величин, распределенных так же, как $X_j^{(n)}$, $j=1,2,\dots,k$. Обозначим

$$\widetilde{S}_n = \sum_{j=1}^{k} Z_{nj}, \quad \widetilde{\sigma}_n^2 = \sum_{j=1}^{k} DZ_{nj}, \quad \widetilde{S}_n^* = \max_{1\le i\le n}\left|\widetilde{S}_i\right|, \quad \widetilde{F}_n(x) = P\left(\widetilde{S}_n^* < x\widetilde{\sigma}_n\right),$$

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} \xi_j, \quad \sigma_n^2 = DS_n, \quad S_n^* = \max_{1\le i\le n}|S_i|, \quad F_n(x) = P\left(S_n^* < x\sigma_n\right),$$

$$S_n' = \sum_{j=1}^{k} X_j^{(n)}, \quad S_n'^* = \max_{1\le i\le n}\left|S_i'\right|, \quad F_n'(x) = P\left(S_n'^* < x\sigma_n\right),$$

$$S_n'' = \sum_{j=1}^{k+1} Y_j^{(n)}, \quad S_n''^* = \max_{1\le i\le n}\left|S_i''\right|, \quad F_n''(x) = P\left(S_n''^* < x\sigma_n\right), \quad x\in R^1.$$

Воспользовавшись соотношением (1), можем написать

$$\pi(F_n,T) \le \pi(F_n,F_n') + \pi(F_n',\widetilde{F}_n) + \pi(\widetilde{F}_n,T) \le \rho(F_n,F_n') + \rho(F_n',\widetilde{F}_n) + \pi(\widetilde{F}_n,T). \quad (2)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства (2) по отдельности. Начнем с последнего слагаемого. Здесь мы воспользуемся универсальной оценкой Боровкова для схемы серий независимых случайных величин (см. [7]) и тем фактом, что $\widetilde{\sigma}_n \sim \sigma_n$ при $n\to\infty$. Имеем

$$\pi(\widetilde{F},T) \le C_2\left(\sum_{j=1}^{k} M\left|\frac{Z_{jn}}{\sigma_n}\right|^s\right)^{1/(1+s)}, \quad 2<s<3, \; C_2>0.$$

Далее, воспользовавшись результатом Серфлинга [15] об оценке моментов суммы слабо зависимых величин, можем написать

$$M|Z_{nj}|^s = M\left|X_j^{(n)}\right|^s = M\left|X_1^{(n)}\right|^s = M\left|\sum_{j=0}^{p}\xi_j\right|^s \le C_3 p^{s/2}.$$

Затем из условия 2) *теоремы 1* мы имеем, что $\sigma_n > \sigma_0\sqrt{n}$, а из определения функций p, q и k следует, что $k \sim \dfrac{n}{p}$.

Отсюда получаем

$$\frac{1}{\sigma_n^s}\sum_{j=1}^{k} M|Z_{nj}|^s \le C_3\frac{kp^{\frac{s}{2}}}{\sigma_n^s} \le C_4\frac{n}{p}\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{s}{2}} = C_4\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{s-2}{2}} \le C_5 n^{-\left(\frac{(1-\alpha)(s-2)}{2}\right)}.$$

Окончательно,

$$\pi\left(\widetilde{F}_n, T\right) \le C_6 n^{-\left(\frac{(1-\alpha)(s-2)}{2(s+1)}\right)}.$$

Теперь оценим остальные слагаемые. Воспользуемся результатом Мацкявичуса [16], который показал, что для любых двух функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ имеет место неравенство

$$\sup_x \left|F(x) - G(x)\right| \le \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t) - g(t)\right) \cdot e^{-\left(\frac{t^2}{2}\right)} dt \right|,$$

где $f(t)$ и $g(t)$ – соответствующие характеристические функции. Рассмотрим первое слагаемое. Нетрудно проверить, что имеет место следующее неравенство (см. [11]):

$$\rho\left(F_n, F_n'\right) \le \max\left\{ \left| P\left(\frac{S_n'^* + S_n''^*}{\sigma_n} < x\right) - P\left(\frac{S_n'^*}{\sigma_n} < x\right) \right|, \left| P\left(\frac{S_n'^*}{\sigma_n} < x\right) - P\left(\frac{S_n'^* - S_n''^*}{\sigma_n} < x\right) \right| \right\}.$$

Используя неравенство Мацкявичуса, можем написать

$$\left| P\left(\frac{S_n'^* + S_n''^*}{\sigma_n} < x\right) - P\left(\frac{S_n'^*}{\sigma_n} < x\right) \right| \le \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| Ee^{it\left(\frac{S_n'^* + S_n''^*}{\sigma_n}\right)} - Ee^{\frac{itS_n'^*}{\sigma_n}} \right| e^{-\left(\frac{t^2}{2}\right)} dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E\left| e^{\frac{itS_n''^*}{\sigma_n}} - 1 \right| e^{-\left(\frac{t^2}{2}\right)} dt \le \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |t| E\left|\frac{S_n''^*}{\sigma_n}\right| e^{-\left(\frac{t^2}{2}\right)} \le C_7 \left(\frac{DS_n''^*}{\sigma_n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \le C_8 \left(\frac{n}{p}\frac{q}{n}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C_8 \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \le C_9 n^{-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}.$$

Аналогично оценивается и разность $\left| P\left(\frac{S_n'^*}{\sigma_n} < x\right) - P\left(\frac{S_n'^* - S_n''^*}{\sigma_n} < x\right) \right|.$

Оценим теперь второй член правой части неравенства (2). Для оценки этого члена воспользуемся леммой Йошихары [17] (см. также лемму 7 из [11]).

Имеем

$$\rho\left(F_n', \widetilde{F}_n\right) \le C_{10} \frac{n}{p} \varphi(q) \le C_{11} n^{1-\alpha} q^{-\delta} \le C_{12} n^{1-\alpha-\beta\delta}.$$

Следовательно,

$$\pi\left(F_n, T\right) \le C_1 \left(n^{-\left(\frac{(1-\alpha)(s-2)}{2(1+s)}\right)} + n^{-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + n^{1-\alpha-\beta\delta} \right). \qquad (3)$$

Для получения оптимальной оценки приравняем все показатели в (3):

$$\frac{(1-\alpha)(s-2)}{2(1+s)}=\frac{\alpha-\beta}{2}=\alpha+\beta\delta-1$$, отсюда легко получить $\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\delta(s-2)}{3s+4\delta s-2\delta}$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство *теоремы 2* проводится аналогично. Разница заключается лишь в том, что при экспоненциальном убывании коэффициента перемешивания φ функцию $q=q(n)$, применяемую при секционировании, можно взять логарифмически растущей $q(n)=\left[\ln n^{\frac{1}{\gamma}}\right]$. В этом случае

$$\pi(F_n,T)\le C_\gamma\left(n^{-\left(\frac{(1-\alpha)(s-2)}{2(1+s)}\right)}+\frac{\ln^{\frac{1}{2}}n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}+\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Приравняв $\frac{(1-\alpha)(s-2)}{2(1+s)}=\frac{\alpha}{2}$, получим $\alpha=\frac{s-2}{2s-1}$, откуда $\pi(F_n,T)\le C_\gamma\frac{\ln^{\frac{1}{2}}n}{n^{\frac{s-2}{2s-1}}}$, что и завершает доказательство *теоремы 2*.

Кафедра теории вероятностей
И математической статистики

Поступила 09.12.2003

ЛИТЕРАТУРА

1. **Erdo's P. and Kac M.** – Bull. Amer. Math. Soc., 1946, v. 52, p. 92–302.
2. **Donsker M.** – Mem. Amer. Math. Soc., 1951, v. 6.
3. **Прохоров Ю.В.** – Теор. вер. и ее применения, 1956, т. 1, вып. 2, с. 177–238.
4. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
5. **Chung K.L.** – Trans. Amer. Math. Soc., 1948, v. 64, p. 205–233.
6. **Pakshirajan R.P.** – Теор. вер. и ее применения, 1959, т. IV, вып.4, с. 398–403.
7. **Боровков А.А.** – Теор. вер. и ее применения, 1973, т. XVIII, вып. 2, с. 217–234.
8. **Саханенко А.Н.** О точности нормальной аппроксимации в принципе инвариантности. – Тр. Ин-та математики: Асимптотический анализ распределений случайных процессов. Новосибирск: Наука, 1989.
9. **Тихомиров А.Н.** – Теор. вер. и ее применения, 1980, т. XXV, вып. 4, с. 800–818.
10. **Казанчян Т.П.** – Ученые записки ЕГУ, 1984, № 2, с. 22–29.
11. **Казанчян Т.П.** – Изв. АН Арм. ССР. Математика, 1989, т. XXIV, № 6, с. 593–602.
12. **Kaganava S.** – Yokohama Math. J., 1983, v. 31, № 1, 2, p. 121–129.
13. **Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.** Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
14. **Золотарев В.М.** Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
15. **Serfling R.J.** – Ann. Math. Statist., 1970, v. 41, p. 1227–1234.
16. **Мацкявичус В.К.** – Теор. вер. и ее примен., 1983, т. XXVIII, вып. 3, с. 565–569.
17. **Yoshihara K.** – Z. W. Cebiete, 1979, № 43, p. 319–329.

Տ. Պ. ՂԱԶԱՆՉՅԱՆ

ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆԸ ԷՐԴԵՇԻ–ԿԱՑԻ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԹԵՈՐԵՄՈՒՄ ԿԱԽՅԱԼ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Ստացվել է զուգամիտության արագության աստիճանային գնահատական Էրդեշի–Կացի սահմանային թեորեմում ստացիոնար պատահական հաջորդականությունների համար, որոնք բավարարում են հավասարաչափ ուժեղ խառնուրդի պայմանին:

T. P. KAZANCHYAN

THE ESTIMATE OF RATE OF CONVERGENCE IN ERDO'S–KAC LIMIT THEOREM FOR DEPENDENT RANDOM VARIABLES

Summary

The power type estimate of the rate of convergence in Erdo's–Kac limit theorem is obtained for stationary uniformly strong mixing random sequences.