ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2005 Естественные науки

Математика

УДК 517. 91/93

М. О. АРАБЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ОПЕРАТОРА

В работе рассматривается задача на собственные значения для системы уравнений, некоторые коэффициенты которых имеют несуммируемую особенность. Вводятся специальные весовые функциональные пространства, для них доказываются теоремы вложения.

Исследуются вопросы существования и единственности решения краевой задачи. Доказывается существование решения задачи на собственные значения.

1. Введение. В предлагаемой работе рассматривается следующая задача на собственные значения:

$$(Lu)_1=(rDW'')''+((\nu D'-D/r)W')'+(f'\varphi)'=\lambda rh\rho W\ , \qquad (1)$$

$$(Lu)_2=(ar\varphi')'-(a/r+\nu a')\varphi-f'W'=0\ , \qquad (2)$$

где $r\in(0,b)$, $W(r)$, $\varphi(r)$ – искомые, а $f(r)$, $h(r)$ – заданные функции от r. $D(r)=Eh^3(r)/\left(12\left(1-\nu^2\right)\right)$, $a(r)=1/(Eh(r))$, где E, ν, $b=const$, $E>0$, $b>0$, $0<\nu<1$, $h(r)>0$, $\rho(r)>0$.

Краевые условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}&W'\big|_{r=0}=1/r\left[(rDW'')'+(\nu D'-D/r)W'\right]\big|_{r=0}=0,\\&W\big|_{r=b}=W'\big|_{r=b}=0.\end{aligned} \qquad (3)$$

Задача (1)–(3) сравнительно мало изучена. Сложность ее изучения заключается в том, что некоторые коэффициенты уравнений имеют несуммируемую особенность.

В некоторых работах рассматриваются оптимизационные задачи, но не изучаются вопросы о существовании и единственности решения краевой задачи и о существовании решения задачи на собственные значения [1, 2].

2. Весовые пространства. Теоремы вложения. Обозначим через $L_{1,loc}[0,b]$ пространство локально суммируемых функций на любом отрезке, содержащемся строго внутри отрезка $[0,b]$.

Введем весовое гильбертово пространство $H_r^1[0,b]$ со скалярным произведением и нормой: $\langle u,v\rangle_{H_r^1}=\int\limits_0^b(ru'v'+uv/r)dr$, $\|v\|_{H_r^1}=\left(\langle u,v\rangle_{H_r^1}\right)^{1/2}$.

Докажем следующие теоремы вложения.

Теорема 1. Имеет место следующее вложение $H_r^1[0,b]\subset H^1[\delta,b]$, и справедлива оценка

$$\|v\|_{H^1[\delta,b]}\le C_1\|v\|_{H_r^1[0,b]} \tag{4}$$

для любой функции $v\in H_r^1[0,b]$, где $C_1=\left(\max(1/\delta,\ b)\right)^{1/2}$, $\delta>0$.

◄ Для доказательства заметим, что $v^2\le v^2b/r$, $v'^2\le v'^2r/\delta$ $\forall r\in[\delta,b]$. Отсюда в силу того, что $\int\limits_\delta^b\left(v^2b/r+v'^2r/\delta\right)dr<+\infty$ с учетом свойства интеграла Лебега (см. [3]), следуют $v\in H^1[\delta,b]$ и оценка (4). ►

Теорема 2. Любая функция $v\in H_r^1[0,b]$ может быть отождествлена с непрерывной на $[0,b]$ функцией, причем

$$\max_{[0,b]}|v(r)|\le C_2\|v\|_{H_r^1},\quad v(0)=0. \tag{5}$$

◄ Пусть $v\in H_r^1[0,b]$. Тогда в силу теоремы 1 $v\in H^1[\delta,b]$. Отсюда функцию $v(r)$ можно отождествлять с непрерывной на $[\delta,b]$ функцией. Заметим, что

$$\left|v^2(r)-v^2(b)\right|=\left|\int\limits_r^b\left(v^2\right)'dr\right|=\left|\int\limits_r^b 2vv'dr\right|\le\int\limits_r^b\left(v^2/\xi+\xi v'^2\right)'d\xi\le\|v\|^2_{H_r^1[0,b]}. \tag{6}$$

Из оценки (6) следует, что $\int\limits_r^b 2vv'd\xi$ абсолютно непрерывен [3], а отсюда следует существование предела $\lim\limits_{r\to0}\int\limits_r^b 2vv'd\xi=\lim\limits_{r\to0}\left(v^2(r)-v^2(b)\right)$. Так как $v\in C[\delta,b]$, то заключаем, что существует и $\lim\limits_{r\to0}v(r)$. Тогда $v(r)$ непрерывна. Из оценок (4), (6) имеем

$$\max\left|v^2(r)\right|\le\|v\|^2_{H_r^1[0,b]}+v^2(b)\le\|v\|^2_{H_r^1[0,b]}+C\|v\|^2_{[b/2,b]}\le\left(1+CC_1^2\right)\|v\|^2_{H_r^1[0,b]},$$

где $C=\max(1/b,b)$ из теоремы вложения $H^1[0,b]$ в $C[0,b]$. Тем самым оценка (5) доказана, причем $C_2=\left(1+CC_1^2\right)^{1/2}$.

Теперь установим, что $v(0)=0$. Пусть $v(0)=a\ne0$. Тогда легко заметить, что $\int\limits_0^\delta v^2(r)/r\,dr$ будет расходиться. Получили противоречие. Отсюда заключаем, что $v(0)=0$. ►

Через $M[0,b]$ обозначим пространство $C^\infty[0,b]\cap\{$ функции, финитные на левом конце отрезка [0,b]}. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пространство $M[0,b]$ плотно в пространстве $H_r^1[0,b]$.

◄ Пусть $v \in H_r^1[0,b]$. По теореме 1, для любой $\delta > 0$ функция $v(r) \in H^1[\delta/2,b]$. Но тогда в силу плотности пространства $C^\infty[\delta/2,b]$ в пространстве $H^1[\delta/2,b]$ [4] существует последовательность $\{v_n(r)\}_{n=1}^\infty \in C^\infty[\delta/2,b]$ такая, что

$$\|v - v_n\|_{H^1[\delta/2,b]} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{7}$$

Определим следующие функции: $w_n(r) = \begin{cases} 0, & 0 \le r \le \delta, \\ v_n(2\delta)(r-\delta)/\delta, & \delta \le r \le 2\delta, \\ v_n(r), & 2\delta \le r \le b. \end{cases}$

Заметим, что $w_n(r) \in H^1[0,b]$. Аналогично доказанному выше существует последовательность $\{z_{n_m}\}_{m=1}^\infty \in C^\infty[0,b]$ такая, что

$$\|w_n - z_{n_m}\|_{H^1[0,b]} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty \tag{8}$$

для любого фиксированного n. Причем $z_{n_m}(r) = 0$ при $0 \le r \le \delta/2$.

Докажем, что $z_{n_m}(r)$ – искомые. Легко заметить, что $z_{n_m}(r) \in H_r^1[0,b]$. Имеем

$$\begin{gathered}\|v - z_{n_m}\|_{H_r^1[0,b]} \le \|v - z_{n_m}\|^2_{H_r^1[0,\delta/2]} + 4\|v - v_n\|^2_{H_r^1[\delta/2,b]} + 4\|w_n - z_{n_m}\|^2_{H_r^1[\delta/2,b]} + \\ + 4\|v_n - w_n\|^2_{H_r^1[\delta/2,b]}.\end{gathered} \tag{9}$$

Оценим четвертое слагаемое правой части (9):

$$\begin{gathered}\|v_n - w_n\|^2_{H^1{}_r[\delta/2,b]} \le 2\|v_n\|^2_{H_r{}^1[\delta/2,2\delta]} + 2\|v_n(2\delta)(r-\delta)/\delta\|^2_{H_r{}^1[\delta,2\delta]} \le 4\|v\|^2_{H^1{}_r[\delta/2,2\delta]} + \\ + 4\|v - v_n\|^2_{H_r{}^1[\delta/2,2\delta]} + 10\left(v^2(2\delta) + (v(2\delta) - v_n(2\delta))^2\right).\end{gathered} \tag{10}$$

В силу известной теоремы вложения при малых δ имеем

$$|v(2\delta) - v_n(2\delta)| \le \max(\delta, 1/\delta)^{1/2} \|v - v_n\|_{H^1[\delta,2\delta]} = \|v - v_n\|_{H^1[\delta,2\delta]} / \delta^{1/2}.$$

Отсюда с учетом (9), (10) получим

$$\begin{gathered}\|v - z_{n_m}\|^2_{H_r{}^1[0,b]} \le 16\|v\|^2_{H_r{}^1[0,2\delta]} + 20\|v - v_n\|^2_{H_r{}^1[\delta/2,b]} + 40v^2(2\delta) + \\ + 1/\delta\|v - v_n\|^2_{H_r{}^1[\delta,2\delta]} + 4\|w_n - z_{n_m}\|^2_{H_r{}^1[\delta/2,b]}.\end{gathered} \tag{11}$$

С учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега и доказанного выше равенства $v(0) = 0$ имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_0$ такое, что $\forall \delta : 0 < \delta \le \delta_0$

$$\|v\|^2_{H_r^1[0,2\delta]} < \varepsilon \quad \text{и} \quad v^2(2\delta) < \varepsilon. \tag{12}$$

Зафиксируем одно из таких δ. В силу (7) выберем такое $N_0(\delta,\varepsilon)$, что $\forall n \ge N_0$

$$\left\| v - v_n \right\|^2_{H^1[\delta/2,b]} < \varepsilon\delta . \tag{13}$$

Зафиксируем одно из n, $n \ge N_0$. В силу (8) можно выбрать $M_0(n,\delta,\varepsilon)$ такое, что $\forall m \ge M_0$ $\left\| w_n - z_{n_m} \right\|^2_{H^1[0,b]} < \varepsilon\delta$.

Отсюда и из (11)–(13) получим $\left\| v - z_{n_m} \right\|^2_{H_r^1[0,b]} < (144 + 24\delta b)\varepsilon$. ▶

Также вводятся весовые гильбертовы пространства $H_r^2[0,b]$, $\tilde{H}_r^2[0,b]$, $H_r^3[0,b]$ с соответствующими скалярными произведениями:

$$\langle u,\ v\rangle_{H_r^2} = \int_0^b \left(ru''v'' + u'v'/r + uv \right)\ dr, \quad \langle u,\ v\rangle_{\tilde{H}_r^2} = \int_0^b \left(ru''v'' + u'v' + uv/r^2 \right)\ dr,$$

$$\langle u,\ v\rangle_{H_r^3} = \int_0^b \left(ru'''v''' + u''v'' + u'v'/r^2 + uv \right)\ dr .$$

Таким образом,

$$H_r^2[0,b] = \left\{ v : v,\ v',\ v'' \in L_{1,loc}[0,b] \text{ и } \|v\|^2_{H_r^2} = \int_0^b \left(rv''^2 + v'^2/r + v^2 \right) dr < +\infty \right\},$$

$$\tilde{H}_r^2[0,b] = \left\{ v : v,\ v',\ v'' \in L_{1,loc}[0,b],\ \|v\|^2_{\tilde{H}_r^2} = \int_0^b \left(rv''^2 + v'^2 + v^2/r^2 \right) dr < +\infty \right\},$$

$$H_r^3[0,b] = \left\{ v : v,\ v',\ v'',\ v''' \in L_{1,loc}[0,b],\ \|v\|^2_{H_r^3} = \int_0^b \left(rv'''^2 + v''^2 + v'^2/r^2 + v^2 \right) dr < +\infty \right\}.$$

Аналогично лемме 1 и теоремам 1, 2 доказываются следующие леммы и теоремы.

Лемма 2. Пространства $H_r^2[0,b]$, $\tilde{H}_r^2[0,b]$, $H_r^3[0,b]$ полные.

Теорема 3. Имеет место следующее вложение $H_r^2[0,b] \subset H_r^2[\delta,b]$ и справедлива оценка $\|v\|_{H^2[\delta,b]} \le c_1 \|v\|_{H_r^2[0,b]}$ для любой функции $v \in H_r^2[0,b]$, где $C_1 = \left(\max(1/\delta,\ b) \right)^{1/2}$, $\delta > 0$.

Теорема 4. Любая функция $v \in H_r^2[0,b]$ может быть отождествлена с функцией, имеющей непрерывную производную, причем

$$\max_{[0,b]} \left(|v'(r)| + |v(r)| \right) \le C_3 \|v\|_{H_r^2}, \quad v'(0) = 0 .$$

Обозначим через $K[0,b]$ пространство $C^\infty[0,b] \cap$ {функции, производные которых финитны на левом конце отрезка $[0,b]$}.

Лемма 3. Пространство $H_r^2[0,b]$ есть замыкание пространства $K[0,b]$.

Лемма 4. Шар $S = \left\{ u(r) : u(r) \in \tilde{H}_r^2[0,b],\ \|u\|_{\tilde{H}_r^2} \le R \right\}$ предкомпактен в $H_r^1[0,b]$.

◀ Имеем $\int\limits_0^b\left(\sqrt{r+h}u'(r+h)-\sqrt{r}\quad u'(r)\right)^2dr=\int\limits_0^b\left[\int\limits_r^{r+h}\left(\sqrt{\xi}\quad u'(\xi)\right)'d\xi\right]^2dr=$

$$=\int\limits_0^b\left[\int\limits_r^{r+h}\left(\sqrt{\xi}\quad u''(\xi)+u'(\xi)/\left(2\sqrt{\xi}\right)\right)d\xi\right]^2dr\le\left(2bh+\frac{1}{2}\int\limits_0^b\ln\left(1+\frac{h}{r}\right)dr\right)R^2\to0.$$

Далее, $\int\limits_0^b ru'^2\,dr\le b\int\limits_0^b u'^2\,dr\le bR^2$ при $h\to0$, $\forall u\in S$.

Равностепенная непрерывность по норме L_2 и равномерная ограниченность множества $\left\{\sqrt{r}\quad u'(r)\right\}_{u\in S}$ доказаны. Тогда по теореме Рисса (см. [4]) из этого множества можно выделить такую сходящуюся подпоследовательность, что

$$\int\limits_0^b r\left(u'_m-u'_n\right)^2dr=\int\limits_0^b\left(\sqrt{r}u'_m-\sqrt{r}u'_n\right)^2dr\to0 \text{ при } m,n\to\infty. \quad (14)$$

Обозначим через $S_1=\left\{u_n(r)\right\}_{n=1}^{\infty}$. Аналогично доказанному выше можно установить существование такой сходящейся подпоследовательности из S_1, что $\int\limits_0^b\left(u_{n_k}-u_{n_l}\right)^2/r\,dr\to0$ при $k,\,l\to\infty$. Отсюда с учетом (14) имеем $\left\|u_{n_k}-u_{n_l}\right\|_{H_r^1}\to0$ при $k,\,l\to\infty$. ▶

Аналогично доказываются следующие леммы.

Лемма 6. Шар $S=\left\{u(r):u(r)\in H_r^3[0,b],\ \|u\|_{H_r^3}\le R\right\}$ предкомпактен в $H_r^2[0,b]$.

Лемма 7. Шары $S=\left\{u(r):u(r)\in H_r^1[0,b],\ \|u\|_{H_r^1}\le R\right\}$ и $S_2=\left\{u(r):u(r)\in H_r^2[0,b],\ \|u\|_{H_r^2}\right\}\le R$ предкомпактны в $L_2[0,b]$.

3. Существование и единственность обобщенного решения краевой задачи. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned}(Lu)_1&=(rDW'')''-((\nu D'-D/r)W')'+(f'\varphi)'=p_1,\\(Lu)_2&=(ar\varphi')'-(a/r+\nu a')\varphi-f'W'=p_2\end{aligned}\quad(15)$$

при краевых условиях (3), где $Lu=\left((Lu)_1,(Lu)_2\right)$, $u=(w,\ \varphi)$. Обозначим через V следующее линейное подпространство:

$$V=\left\{v:\ v=(v_1,v_2),\ v_1\in H_r^2,\ v_2\in H_r^1,\ v_1(b)=v'_l(b)=0\right\}.$$

Определим норму на V: $\|v\|_V=\left(\|v_1\|_{H_r^2}^2+\|v_2\|_{H_r^1}^2\right)^{1/2}$.

На пространстве V рассмотрим билинейную форму

$$B(u,v)=\int_0^b\Big[rDu_1''v_1''+\big(D-\nu D'r\big)u'_1v'_1/r-f'u_2v'_1+aru'_2v'_2+\big(a+\nu a'r\big)u_2v_2/r+$$

$+f'u'_1v_2\Big]dr-a\nu u_2v_2\Big|_0^b$, порожденную дифференциальным выражением и краевыми условиями (3) задачи (15).

Определение. Функция $u\in V$ называется обобщенным решением задачи (15), с условиями (3), если

$$B\big(u,v\big)=\big\langle p_1,v_1\big\rangle_{L_2}-\big\langle p_2,v_2\big\rangle_{L_2}\quad\forall v\in V. \tag{16}$$

В следующей теореме устанавливается существование решения задачи (16).

Теорема 5. Пусть $D(r)$, $D(r)-\nu D'(r)r$ и $a'(r)\in L_\infty[0,b]$, $f'(r)\in L_1[0,b]$, $D(r)\ge D_0>0$, $D(r)-\nu D'(r)r\ge D_{10}>0$, $a(r)\ge a_0>0$. Тогда для любой $p=\big(p_1,p_2\big)$, $p_1,p_2\in L_2[0,b]$, задача (16) имеет единственное решение $u\in V$, причем верна оценка

$$\|u\|_V\le\alpha^{-1}\Big(\|p_1\|^2+\|p_2\|^2\Big)^{1/2}. \tag{17}$$

Решение u удовлетворяет краевым условиям $u_1(b)=u'_1(b)=u'_1(0)=u_2(0)=0$ в классическом смысле.

◄ Из полноты пространств H_r^2,H_r^1 и оценки теоремы 4 и следует замкнутость пространства V. Покажем теперь, что билинейная форма $B(u,v)$ V-эллиптична, т.е.

$$B(v,v)\ge\alpha\|v\|_V^2\quad\forall v\in V, \tag{18}$$

где $\alpha=\min\Big(D_0,\ D_{10}/2,\ 4D_{10}/b^3,\ \big(1-\varepsilon\big)a_0,\ 1-\nu^2/\varepsilon\Big)$, а ε – такое число, что $\nu^2<\varepsilon<1$. Имеем

$$B(v,v)=\int_0^b\Big[rDv''^2_1+\big(D-\nu D'r\big)v'^2_1/r+arv'^2_2+\big(a+\nu a'r\big)v_2^2/r\Big]dr-a\nu v_2^2\Big|_0^b. \tag{19}$$

Преобразуем некоторые члены $B(v,v)$.

$$\int_0^b\Big[arv'^2_2+\big(a+\nu a'r\big)v_2^2/r\Big]dr-a\nu v_2^2\Big|_0^b=\int_0^b\Big[arv'^2_2+\big(a+\nu a'r\big)v_2^2/r-a'\nu v_2^2-2a\nu v'_2\Big]dr\ge$$

$$\ge\int_0^b\Big(\big(1-\varepsilon\big)arv'^2_2+a\big(1-\nu^2/\varepsilon\big)v_2^2/r\Big)dr. \tag{20}$$

Далее, $v_1(r)=-\int_0^b v'_1(\xi)d\xi$. Отсюда

$$\int_0^b v_1^2dr\le\int_0^b\left(\int_0^b\xi d\xi\int_0^b v'^2_1/\xi\,d\xi\right)dr\le b^3/2\int_0^b v'^2_1/r\,dr. \tag{21}$$

Из (19)–(21) выберем ε такое, чтобы $\nu^2<\varepsilon<1$ и получим (18). Легко доказать, что $|B(u,v)|\le M_1\|u\|_V\|v\|_V$. Аналогично можно доказать, что линейный функционал $\big\langle p_1,v_1\big\rangle_{L_2}-\big\langle p_2,v_2\big\rangle_{L_2}$ ограничен на V. Тогда, по лемме Лакса–

Мальграмма [5] существует единственное решение задачи (16) и справедлива оценка (17). Последнее утверждение теоремы следует из теоремы 4. ►

4. Существование собственных чисел и обобщенных собственных функций задачи на собственные значения.

Определение. Функцию $u \in V$, $u \neq 0$, и число λ назовем обобщенной собственной функцией и собственным числом задачи (15) с условиями (3), если выполняется следующее равенство:

$$B(u,v) = \lambda \langle rh\rho u_1, v_1 \rangle_{L_2} \quad \forall v \in V. \tag{22}$$

Теорема 6. Пусть $D(r)$, $D(r) - \nu D'(r) r$, $a'(r)$, $h(r)$ и $\rho(r) \in L_\infty[0,b]$, $f'(r) \in L_1[0,b]$, $D(r) \geq D_0 > 0$, $D(r) - \nu D'(r) r \geq D_{10} > 0$, $a(r) \geq a_0 > 0$, $h(r) \geq h_0 > 0$, $\rho(r) \geq \rho_0 > 0$. Тогда существует последовательность собственных чисел задачи (21) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$, где $\lambda_k \to +\infty$, $k \to +\infty$, $\lambda_k > 0$. Каждому λ_k соответствует конечное число линейно независимых собственных функций, принадлежащих V. Система $\{u_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ первых координат собственных функций составляет полную ортонормированную систему с весом $rh\rho$. Для любого $u_1 \in L_2$ имеет место разложение

$$u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_{1k}, \quad \int_0^b \left(u_1 - \sum_1^N a_k u_{1k} \right) rh\rho \, dr \to 0 \text{ при } N \to \infty. \tag{23}$$

◄ Возьмем любое $\psi \in L_2[0,b]$. Тогда условие

$$B(u,v) = \langle rh\rho\psi, v_1 \rangle_{L_2} \quad \forall v \in V, \tag{24}$$

полученное из (16) при $p = \left(\sqrt{rh\rho}\,\psi, 0\right)$ в силу теоремы 5, определяет функцию $u \in V$. Тем самым определен оператор G: $\psi \in L_2[0,b] \to u = G\psi \in V$, причем верна оценка

$$\|u\|_V = \|G\psi\|_V \leq \alpha^{-1} \left\| \sqrt{rh\rho}\,\psi \right\|_{L_2} \leq M_1 \|\psi\|_{L_2}. \tag{25}$$

Докажем, что оператор $F_1\psi = \sqrt{rh\rho}\,(G\psi)_1$, как оператор, отображающий $L_2[0,b] \to L_2[0,b]$, компактный и самосопряженный. В (24) подставим $v = (v_1, 0)$ и $v = (0, -v_2)$. Полученные равенства сложим. В результате имеем

$$B_1(u,v) = \langle rh\rho\psi, \ v_1 \rangle_{L_2} \quad \forall v \in V, \tag{26}$$

где
$$B_1(u,v) = \int_0^b \left[rDu_1'' v_l'' + \left(D - \nu D' r\right) u_1' v_l'/r - f' u_2 v_l' - aru_2' v_2' - \right.$$
$$\left. -\left(a + \nu a' r\right) u_2 v_2 / r - f' u_1' v_2 \right] dr + a\nu u_2 v_2 \Big|_0^b.$$

В отличие от $B(u,v)$ форма $B_1(u,v)$ симметрична, т.е. $B_1(u,v) = B_1(v,u)$. Таким образом, решение задачи (24) $G\psi$ является решением задачи (26). Верно и обратное, решение задачи (26) будет решением задачи (24).

Оператор F_1 можно представить в виде

$$F_1 = \sqrt{rh\rho} I \cdot (G\psi)_1, \tag{27}$$

где I – оператор вложения $H_r^2[0,b]$ в $L_2[0,b]$. По лемме 7 оператор I компактный. Далее, оператор $(G)_1$ в силу (25) ограниченный. Но тогда оператор $I \cdot (G)_1$ тоже компактный [3]. Отсюда и из (27) следует, что и F_1 – компактный.

Из симметричности и ограниченности оператора F_1, определенного на всем $L_2[0,b]$, следует его самосопряженность [3].

Рассмотрим вспомогательную задачу на собственные значения

$$F_1\psi = \mu\psi. \tag{28}$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 8. Существует последовательность собственных чисел $\mu_1,\ldots,\mu_k,\ldots$, $\mu_k \to 0$, $k \to \infty$, $\mu_k > 0$, задачи (28). Каждое собственное число имеет конечную кратность. Соответствующая последовательность собственных функций ψ_k является полной ортонормированной системой в $L_2[0,b]$.

◀ Покажем, что если $F_1\psi = 0$, то $\psi = 0$. Из того, что $\sqrt{rh\rho}\ (G\psi)_1 = 0$, заключаем, что $(G\psi)_1 = 0$. Подставим в (24) $v = u = G\psi$. Имеем

$$\int_0^b \left(aru'^2_2 + (a + \nu a'r)u_2^2/r\right)dr - a\nu u_2^2\Big|_0^b = 0.$$

Отсюда в силу (18) при $v = (0, u_2)$ получим $\alpha\|u_2\|^2_{H_r^1} \le 0$, т.е. $u_2 \equiv 0$. Таким образом, $u = (u_1, u_2) \equiv 0$. Из (26) имеем $\langle rh\rho\psi,\ v_1\rangle_{L_2} = 0\ \forall v \in V$. Докажем, что тогда $\psi = 0$. В силу того, что $v_1(b) = v_1'(0) = v_1'(b) = 0$, получим

$$0 = \int_0^b \sqrt{rh\rho}\ \psi v_1 dr = \int_0^b \left(\int_0^r \left(\sqrt{\xi h\rho}\ \psi\right)' v_1\right)dr = \int_0^b \left(\int_0^r\int_0^z \sqrt{\xi h\rho}\psi d\xi dz + C\right)v_1'' dr. \tag{29}$$

Доказав, что $(v_1, 0) \in V$, подставим в (29) $v_1''(r) = \int_0^r\int_0^z \sqrt{\xi h\rho}\psi d\xi dz + C$ и получим $\int_0^b \left(\int_0^r\int_0^z \sqrt{\xi h\rho}\psi d\xi dz + C\right)^2 dr = 0$ или, что то же самое, $\sqrt{rh\rho}\psi = 0$ $\forall r \in [0,b]$.

Таким образом, если $F_1\psi = 0$, то $\psi = 0$. Применяя к задаче (28) теорию уравнений с компактными самосопряженными операторами [3] и учитывая тот факт, что $F_1\psi = 0$, имеем $\psi = 0$. ▶

Лемма 9. Пусть μ – собственное число, а ψ – собственная функция задачи (28), тогда $\lambda = 1/\mu$ и $u = G\psi$ являются соответственно собственным числом и собственной функцией задачи (24).

◀ В самом деле, $B(u,v) = B(G\psi, v) = \left\langle \sqrt{rh\rho}\ \ \psi, v_1 \right\rangle_{L_2} =$

$= 1/\mu \left\langle rh\rho (G\psi)_1, v_1 \right\rangle_{L_2} = \left\langle rh\rho u_1, v_1 \right\rangle_{L_2} \quad \forall v \in V.$ ▶

Лемма 10. Пусть λ – собственное число, а u – собственная функция задачи (24), тогда $\mu = 1/\lambda$ и $\psi = \sqrt{rh\rho u_1}$ являются соответственно собственным числом и собственной функцией задачи (28).

Продолжим доказательство теоремы 6.

Из лемм 8 и 9 следует существование собственных чисел и собственных функций задачи (22). Докажем, что $\lambda_k > 0$. Это следует из того, что

$$\alpha \|u\|_V^2 \le B(u,u) = \lambda \left\langle rh\rho u_1, u_1 \right\rangle_{L_2}.$$

Выполнение (23) следует из лемм 8 и 10. ▶

Кафедра математических методов и моделирования

Поступила 13.10.2004, после доработки – 24.02.2005

ЛИТЕРАТУРА

1. **Араркцян Б.Г., Гнуни В.Ц., Оганесян А.О.** Проектирование оболочек вращения минимальной массы. Сб. научных трудов,посвященных 60-летию ЕГУ, 1981.
2. **Араркцян Б.Г., Атоян Л.А.** – Прикладная математика, ЕГУ, 1984, № 3, с. 48–55.
3. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
4. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
5. **Сьярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.

Մ. Հ. ԱՐԱԲՅԱՆ

ՄԻ ՎԵՐԱՍԵՐՎՈՂ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍՊԵԿՏՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է ոչ հանրագումարելի գործակիցներով հավասարումների համակարգի սեփական արժեքների խնդիրը: Ներմուծվում են հատուկ կշռային ֆունկցիոնալ տարածություններ, որոնց համար ապացուցվում են ներդրման թեորեմներ:

Ուսումնասիրվում է եզրային խնդրի գոյության և միակության հարցը, ապացուցվում է սեփական արժեքների խնդրի լուծման գոյությունը:

M. H. ARABYAN

ON AN EIGENVALUE PROBLEM

Summary

In the paper an eigenvalue problem for a system of equations with unsummable coefficients is discussed. To solve the problem special weight functional spaces are introduced. For these spaces embedding theorems are proved.

The existence and uniqueness of a boundary value problem is considered. The existence of eigenvalue problem solution is proved.